

RİYAZİYYAT VƏ MEXANİKA ELMLƏRİ

MATHEMATICS AND MECHANICAL SCIENCES

DOI: <https://doi.org/10.36719/2663-4619/119/74-82>

Səltənət Veysova

Milli Müdafiə Universiteti

fizika-riyaziyyat elmləri üzrə fəlsəfə doktoru

<https://orcid.org/0009-0003-9379-3280>

seltenet.veysova63@gmail.com

Sima Paşayeva

Milli Müdafiə Universiteti

fizika-riyaziyyat elmləri üzrə fəlsəfə doktoru

<https://orcid.org/0009-0008-0079-1726>

sima.pashayeva73@gmail.com

Avtonom diferensial tənliklərin həllinin yeganəlik meyarı

Xülasə

Məqalədə avtonom diferensial tənliklərin həllinin yeganəliyi məsələsinə baxılmışdır. Sıfırları ilə ədəd oxunu funksiyanın işarəsinin sabit olduğu aralıklara bölən və hər bir aralıqda başlanğıc nöqtəni seçməklə təyin olunmuş funksiyalar üçün Koşi məsələsinin həllinin yeganəliyi və davamlılığı tədqiq olunmuşdur. Bu diferensial tənliyin məxsusi həllinin varlığı araşdırılarkən tənliyin sağ tərəfindəki funksiyanın analitik ifadəsindən və onun sıfırlarının koordinat müstəvisində yerləşməsindən asılı olaraq həllin “birtərəfli” yeganəlik halı müəyyən edilmişdir. Göstərilmişdir ki, verilmiş şərtlər daxilində tənliyin həllinin başlanğıc nöqtənin yaxın ətrafından bu nöqtəyə keçməsi üçün zəruri zaman anı qeyri-məxsusi inteqralla təyin olunur. Sonlu zaman anında həllin yeganəliyinin pozulması qeyri-məxsusi inteqralın bilavasitə yığılan olması ilə, həllin tarazlıq halına keçə bilməməsi isə qeyri-məxsusi inteqralın dağılan olması ilə izah olunduğu və bununla da həllin yeganəliyinin saxlanılması xüsusiyyəti əsaslı öyrənilmişdir.

Açar sözlər: avtonom diferensial tənlik, həllin varlığı və yeganəliyi, Lipşits şərti, məxsusi həll, “birtərəfli” yeganəlik, istiqamətlər meydanı, inteqral ayrısı, faza portreti

Saltanat Veysova

National Defense University

PhD in Physics and Mathematics

<https://orcid.org/0009-0003-9379-3280>

seltenet.veysova63@gmail.com

Sima Pashayeva

National Defense University

PhD in Physics and Mathematics

<https://orcid.org/0009-0008-0079-1726>

sima.pashayeva73@gmail.com

Uniqueness Criteria for the Solution of Autonomous Differential Equations

Abstract

The article considers the uniqueness of solutions of autonomous differential equations. The uniqueness and continuability of solutions Initial Value Problem (IVP) for functions whose zeros divide the number line into intervals where the sign of the function is constant and are determined

by the choice of the initial point on each interval are investigated. In studying the existence of a special decision to this type of differential equation, “one-sided” uniqueness was established depending on the given function and the location of its zeros in the coordinate plane. It is shown that the time it takes for the solution of the equation to pass from the neighborhood of the initial point to this point is determined by an improper integral. It has been studied that the violation of the uniqueness of the solution at the final moment of time is due to the fact that the improper integral converges and the impossibility of the solution coming to the equilibrium position is due to the fact that the improper integral diverges, there by preserving the uniqueness.

Keywords: Autonomous differential equation, the existence and uniqueness of the solution, Lipschitz condition, particular solution, "one-sided" uniqueness, direction fields, integral curve, phase portrait

Giriş

Avtonom diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi, onun həndəsi, mexaniki və analitik həlli bir çox müəlliflər tərəfindən araşdırılmışdır (Astaşova, 2012). Göstərilmişdir ki, sonlu sayda sıfırları olan tənliklərdə istiqamətlər meydanı $y = a_k$ xətlərinə nəzərən üfüdür. Həllin varlığı və yeganəliyi teoreminə əsasən müstəvinin hər bir nöqtəsindən yalnız bir inteqral əyrisi keçir və deməli, digər inteqral əyriləri $y = a_k$ düz xəttini kəsmir (Bufetov, Qonçaruk, İlyashenko, 2019).

Tədqiqat

Düz xətt üzərində $y' = f(y)$ avtonom diferensial tənliyinə baxaq. Fərz edək ki, $f(y) \in C^1(R)$ funksiyası $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ nöqtəsində sonlu sayda sıfırlara malikdir. Bu zaman $y' = f(y)$ tənliyinin istiqamətlər meydanı $y = a_k$ xəttinə nəzərən üfüdür, belə ki, $y(a_k) = 0$. Ona görə də $\{y = a_k\}$ xətləri inteqral əyriləri ailəsinə daxil olur. Həllin varlığı və yeganəliyi teoreminə əsasən müstəvinin hər bir nöqtəsindən tənliyin yalnız və yalnız bir inteqral əyrisi keçir: deməli, digər inteqral əyriləri $\{y = a_k\}$ xətləri ilə kəsişə bilməz. Ona görə də inteqral əyriləri tamamilə $\Pi_k = \{a_k < y < a_{k+1}\} \subset R^2$ zolağında və yaxud $\Pi_0 = \{y < a_0\}$, $\Pi_n = \{y > a_n\}$ yarım-müstəvilərin birində yerləşir. Qeyd edək ki, $f(y)$ funksiyası öz sıfırları arasında işarəsini dəyişmir. Fərz edək ki, $f(y)$ funksiyası $y \in (a_k, a_{k+1})$ olduqda müsbətdir. Onda Π_k zolağında istiqamətlər meydanının xətləri müsbət bucaq altında meyl edir və Π_k -da olan ixtiyari inteqral əyrisi yuxarıya doğru yönəlmiş olur. Başqa sözlə a_k və a_{k+1} arasında yerləşən ixtiyari həll üçün $y(x) = f(y(x)) > 0$ olur, ona görə də bu həllər monoton artandır (Paşayeva S, Veysova S. 2024: səh. 150-155). Zolağın sərhəddinə yaxın hissədə $f(y)$ funksiyası kiçilir, ona görə də bu hissədə istiqamətlər meydanı demək olar ki, üfüdür və inteqral əyrisinin dönmə bucağı kiçilir. Belə ki, inteqral əyrisi Π_k zolağının sərhəddini kəsə bilmir və beləliklə, $\{y = a_{k+1}\}$ xəttinin sağ tərəfiylə və $\{y = a_k\}$ xəttinin isə sol tərəfiylə sonsuzluğa yaxınlaşır (Astaşova, Nikişin, 2010).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = a_{k+1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = a_k \quad (1)$$

Analoji hökm a_k və a_{k+1} sıfırları arasında $f(y)$ funksiyasının mənfi olan halı üçün də doğrudur. Yəni, bu halda inteqral əyriləri aşağı yönəlmiş olur və

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = a_k, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = a_{k+1}. \quad (2)$$

Qeyd etmək lazımdır ki, əgər $y(x)$ avtonom diferensial tənliyin həllidirsə, onda $y(x+C)$ də bu tənliyin həllidir. Başqa sözlə avtonom diferensial tənliyin inteqral əyrisi $x \rightarrow x+C$ yerdəyişməsində ümumi inteqral əyrisinə keçir. Deməli, Π_k zolağında müxtəlif inteqral əyrisi Ox oxu boyunca yerdəyişmədə digər inteqral əyrisindən fərqlənir.

Fərz edək ki, $f(y)$ funksiyası hər hansı bir intervalda təyin olunmuşdur və kəsilməzdir. $y' = f(y)$ tənliyi x_0 nöqtəsinin yaxın ətrafında $y(x_0) = y_0$ şərtini ödəyən həlli var və bu həll yeganədir; $f(y_0) \neq 0$ olduqda verilmiş həll $x - x_0 = \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{f(s)}$ integralı ilə müəyyən olunur (Veysova Paşayeva, 2024, s. 142-149). Bu hökm $y(x_0) = 0$ olduqda doğru deyil. Bu halda da verilmiş tənliyin həlli var: $y(x) \equiv y_0$ sabit funksiyası verilmiş tənliyi ödəyir, burada yalnız tənliyin x_0 başlanğıc şərtini ödəyən həllinin yeganəliyini tədqiq etmək qalır.

Göstərmək olar ki, $y' = f(y)$ tənliyinin həlli $y_0 \pm \varepsilon$ nöqtəsindən y_0 nöqtəsinə keçməsi üçün lazım olan zaman anı $\int_{y_0+\varepsilon}^{y_0} \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi integralına bərabərdir. Əgər $\int_{y_0+\varepsilon}^{y_0} \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi integral yığılandırsa onda verilmiş zaman anı sonludur və həllin yeganəliyi pozulur. Əgər qeyri-məxsusi integral dağılandırsa onda tənliyin həlli sonlu zaman fasiləsində tarazlıq halına keçə bilmir və həllin yeganəliyi saxlanılır. Beləliklə, aşağıdakı təklifin doğruluğu alınır (Serqeev, 2015, s. 95).

Təklif. Fərz edək ki, $f(y)$ funksiyası kəsilməzdir və y_0 nöqtəsində izolə olunmuş sıfıra malikdir: $f(y_0) = 0$ və y_0 nöqtəsinin $(y_0 - \varepsilon, y_0) \cup (y_0, y_0 + \varepsilon)$ ətrafında $f(y) \neq 0$.

1. Fərz edək ki,

$$\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0} \frac{dy}{f(y)}, \quad \int_{y_0}^{y_0+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} \quad (3)$$

integrallarının hər ikisi dağılandır. Onda $y(x) \equiv y_0$ həlli

$$y' = f(y) \quad (4)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (5)$$

Koşi məsələsinin yeganə həllidir.

2. Əgər (3) integrallarından heç olmasa biri yığılandırsa onda Koşi məsələsinin sonsuz sayda həlli var.

(1), (2) ifadələrini ciddiyyəti və avtonom diferensial tənliklər üçün Koşi məsələsinin həllinin yeganəliyi aşağıdakı teoremlərlə əsaslandırılır (Bufetov, Qonçaruk, İlyashenko, 2019).

Teorem 1. $y' = f(y)$ avtonom diferensial tənliyi verilmişdir və $f(y)$ funksiyası D oblastında kəsilməzdir yəni, $f(y) \in C_{(D)}$, $D \subset R$. Əgər $f(c) = 0$ olarsa, onda $y = c$ həllinin məxsusi həll olması üçün $\int_{y_0}^c \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi integralının yığılan olması zəruri və kafidir.

Burada y_0 elə bir nöqtədir ki, (y_0, c) intervalında $f(y)$ funksiyası öz işarəsini saxlayır. Yəni, y_0 və c arasında $f(y)$ funksiyasının başqa sıfırları yoxdur.

Teorem 2. Fərz edək ki, kəsilməz $f(y)$ funksiyası sonlu və ya sonsuz $\{a_k\}$ diskret sıfırlara malikdir və bütün

$$\int_{a_k-\varepsilon}^{a_k} \frac{dy}{f(y)}, \quad \int_{a_k}^{a_k+\varepsilon} \frac{dy}{f(y)} \quad (6)$$

qeyri-məxsusi integralları dağılandır. Onda (4), (5) Koşi məsələsinin $\forall y_0 \in R$ üçün yeganə həlli var. Bundan əlavə:

1) Fərz edək ki, a_k və a_{k+1} verilmiş $f(y)$ funksiyasının iki qonşu sıfırlarıdır və $a_k < y_0 < a_{k+1}$. Onda $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtinə malik olan $y(x)$ həlli bütün x -lar üçün təyin olunmuşdur. Əgər (a_k, a_{k+1}) intervalında $f(y) > 0$ olarsa, onda $y(x)$ monoton olaraq artır və

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = a_{k+1}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = a_k.$$

(a_k, a_{k+1}) intervalında $f(y) < 0$ olarsa, onda $y(x)$ monoton olaraq azalır və

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = a_{k+1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = a_k.$$

2) Fərz edək ki, $(a_n, +\infty)$ intervalında $f(y) > 0$ və $y_0 > a_n$. Onda $y(x_0) = y_0$ başlanğıc şərtini ödəyən $y(x)$ həlli monoton olaraq artır və $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = a_n$ ödəyir.

2a) Əgər $y_0 > a_k$ olduqda $\int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi integralı dağılındırsa, tənliyin həlli bütün x -lar üçün təyin olunmuşdur və $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

2b) Əgər bu integral yığılındırsa, onda tənliyin $y(x)$ həlli $\forall x < c$ şüasında təyin olunmuşdur və $\lim_{x \rightarrow c-0} y(x) = +\infty$.

Məsələnin qoyuluşu və həlli.

Məqalədə

$$y' = f(y), \quad f(y) = \begin{cases} f_1(y), & y \geq 0 \\ f_2(y), & y < 0 \end{cases} \quad (7)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (8)$$

tipli avtonom diferensial tənliyin həllinin yeganəlik meyarı tətbiq edilmişdir.

(7) tənliyinin sağ tərəfindəki $f(y)$ funksiyası $D \subset R$ oblastında kəsilməzdir, yəni $f(y) \in C_{(D)}$.

Əvvəlcə (7) tənliyinin xüsusi halı olan

$$y' = f(y) = \begin{cases} g(y), & y > 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} \quad (7^*)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad (8^*)$$

avtonom diferensial tənliyinin yeganəlik meyarına baxaq. Verilmiş (7^*) tənliyinin sağ tərəfindəki $f(y)$ funksiyası $[0, +\infty)$ intervalında kəsilməzdir, yəni $f(y) \in C_{(D)}$, $D = [0, +\infty)$:

$\lim_{y \rightarrow +0} f(y) = 0$ və $f(y)$ funksiyası Lipsits şərtini ödəmir (Denisov, 2018, s. 87). $f(y)$ funksiyasının

verilmiş intervalda Lipsits şərtinin ödənilməsinə fərz edək. Yəni, fərz edək ki, $\exists L > 0$ Lipsits sabiti var ki, $\forall y_1, y_2 \in [0, +\infty)$ üçün $|f(y_1) - f(y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ şərti ödənsin (Petrovskiy, 2009). Lakin elə nöqtələr cütü tapaq ki, bu bərabərsizlik ödənməsin. Məlumdur ki, bu nöqtələrdən biri sıfır, digəri isə $[0, +\infty)$ yarım intervalından götürülmüş ixtiyari nöqtədir. Tutaq ki, $y_1 \in [0, +\infty)$, $y_2 = 0$. Bu halda

$$|f(y_1) - f(y_2)| = |f(y_1) - 0| = |f(y_1)| \leq L|y_1 - 0| = L|y_1|$$

Yəni, $|f(y_1)| \leq L|y_1|$. $\forall L$ üçün $\exists y_1^* \in (0, +\infty)$ var ki, $|f(y_1^*)| > L|y_1^*|$. Bu isə o deməkdir ki, $f(y)$ funksiyası Lipsits şərtini ödəmir.

Əgər $f(y) \neq 0$ olarsa, onda verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad \text{və} \quad y = \begin{cases} \varphi(x, C_1), & y > 0 \\ C_2, & y = 0 \end{cases}$$

şəklindədir. $f(y)=0$ olduqda tənlik sonlu sayda $y=a_k=0$ və $y=a_{k+1}$ sıfırlara malikdir. Bu həllərin hər biri üçün yeganəlik meyarını yoxlayaq. $y>0$ halında $y=a_k=0$ xəttindən aşağıda həllin varlığından danışmaq olmaz. $y=a_k=0$ və $y=a_{k+1}$ xətləri arasında $\exists y_0=a_k+\varepsilon$ nöqtəsi var ki, bu nöqtədən çıxan həllin $y=a_k=0$ və $y=a_{k+1}$ xətlərinə qədər davamlılığı mümkündür. Bundan əlavə $y=a_{k+1}$ xəttindən yuxarıda yəni $y_0^*=a_{k+1}+\varepsilon$ nöqtəsindən $y=a_{k+1}$ xəttinə qədər olan həlli də mümkündür (Balandin, Chudinov, 2008, pp. 5-15).

1) $y=a_k=0$ həllinə baxaq. Bu həllin yeganəliyi $y=a_k$ xəttindən yuxarıda yerləşən $y_0=a_k+\varepsilon$ nöqtəsindən bu xəttə qədər olan $\int_{y_0}^0 \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi integralın yığılan və ya dağılan olmasından asılıdır. Əgər $\int_{y_0}^0 \frac{dy}{f(y)} = \infty$ olarsa, onda $y=a_k=0$ həlli məxsusi həll deyil. Əgər $\int_{y_0}^0 \frac{dy}{f(y)} < \infty$ olarsa, onda $y=a_k=0$ həlli məxsusi həldir.

2) $y=a_{k+1}$ həllinin məxsusi həll olması $y=a_{k+1}$ xəttindən aşağıda yerləşən $\tilde{y}_0^*=a_{k+1}-\varepsilon$ nöqtəsindən bu xəttə qədər olan $\int_{\tilde{y}_0^*}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)}$ və $y=a_{k+1}$ xəttindən yuxarıda yerləşən $y_0^*=a_{k+1}+\varepsilon$ nöqtəsindən bu xəttə qədər olan $\int_{y_0^*}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi integralının yığılan və ya dağılan olmasından asılıdır (Sabatulina T., Malygina V. 2014.—№ 61.—P. 1–16).

$\int_{\tilde{y}_0^*}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)} = \infty$ və ya $\int_{y_0^*}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)} = \infty$ olarsa, onda $y=a_{k+1}$ məxsusi həll deyil. Əgər $\int_{\tilde{y}_0^*}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)} < \infty$ və ya $\int_{y_0^*}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)} < \infty$ olarsa, onda $y=a_{k+1}$ məxsusi həldir.

Autonom diferensial tənliklər üçün həllin yeganəlik meyarını (7) tənliyinə tətbiq edək.

Verilmiş (7) tənliyinin sağ tərəfindəki $f(y)$ funksiyası $D \subset R$ intervalında kəsilməzdir, yəni $f(y) \in C_{(D)}$. Əgər $f(y) \neq 0$ olarsa, onda verilmiş tənliyin ümumi həlli

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad \text{və} \quad y = \begin{cases} \varphi(x, C_1), & y \geq 0 \\ \psi(x, C_2), & y < 0 \end{cases}$$

şəklindədir. Əgər $f(y)=0$ olarsa, onda tənlik sonlu sayda $y=a_k=0$ və $y=a_{k+1}$ kimi sıfırlara malikdir. Teorem 1-ə əsasən $y=a_k=0$ həllinin məxsusi həll olması üçün $\int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi integralının yığılan olması zəruri və kafidir. $y \geq 0$ halında integrallamanın y_0 aşağı sərhəddi olaraq $y=a_k=0$ xəttindən yuxarıda yerləşən $y_0=a_k+\varepsilon$ nöqtəsi götürülür. Bu halda $\int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)}$, $\int_{y_0}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)}$ və yaxud $\int_{y_0^*}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi integrallarının yığılan və ya dağılan olması $y=a_k=0$ və $y=a_{k+1}$ xətləri vasitəsilə tənliyin həllinin yeganəlik meyarını müəyyən etməyə imkan verir. Əgər

$\int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)} = \infty$, $\int_{y_0}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)} = \infty$ və ya $\int_{y_0^*}^{a_{k+1}} \frac{dy}{f(y)} = \infty$ olarsa, yəni verilmiş qeyri-məxsusi inteqralları

dağılandırırsa, onda $y = a_k = 0$ və $y = a_{k+1}$ məxsusi həll deyil. (7) tənliyinin $y < 0$ şərtində $y = a_k = 0$ sıfırından başqa $y = a_k \neq a_i$ sıfırları da vardır. $y < 0$ halında inteqrallamanın $\tilde{y}_0$ aşağı sərhəddi olaraq $y = a_k = 0$ xəttindən aşağıda yerləşən $\tilde{y}_0 = a_k - \varepsilon$ nöqtəsi götürülür. Bu halda

$\int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)}$ və $\int_{\tilde{y}_0}^{a_i} \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-məxsusi inteqrallarının yığılan və ya dağılan olması $y = a_k = 0$ və $y = a_i$

xətləri vasitəsilə tənliyin həllinin yeganəlik meyarını müəyyən etməyə imkan verir. Əgər

$\int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)} = \infty$ və $\int_{\tilde{y}_0}^{a_i} \frac{dy}{f(y)} = \infty$ olarsa, yəni verilmiş qeyri-məxsusi inteqrallar dağılandırırsa, onda

$y = a_k = 0$ məxsusi həll deyil (Pantryaqin, 1986).

Xüsusi maraq kəsb edən iki əsas faktı qeyd etmək olar. $y \geq 0$ və $y < 0$ halında (7) tənliyinin sağ tərəfindəki $f_1(y)$ və $f_2(y)$ funksiyaları üçün $y = a_k = 0$ tənliyin ortaq sıfırındır. Bu halda $y = a_k = 0$ xəttindən uyğun olaraq yuxarıda və aşağıda götürülmüş $y_0 = a_k + \varepsilon$ və $\tilde{y}_0 = a_k - \varepsilon$

nöqtələrindən bu xəttə qədər olan $\int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)}$ və ya $\int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)}$ qeyri-müəyyən inteqrallarının sonlu limiti

varsa, o zaman $y = a_k = 0$ məxsusi həllidir. Burada iki hal mümkündür (Balandin, Sabatulina, 2017, s. 26–37).

$$1) \int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)} < \infty \quad \text{və} \quad \int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)} = \infty$$

$$2) \int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)} = \infty \quad \text{və} \quad \int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f(y)} < \infty$$

Hər iki halda $y = a_k = 0$ xəttində “birtərəfli” yeganəlik müşahidə olunur. $y \geq 0$ halında (7) tənliyinin sağ tərəfindəki $f_1(y)$ funksiyası üçün

$$x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{f_1(y)} \Rightarrow x(y) = x_0 + F_1(y)$$

yazmaq olar. Burada $F(y) = \int_{y_0}^y \frac{dy}{f_1(y)}$ və $x'(y) = F_1'(y)$ olduğundan $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{F_1'(y)}$.

Digər tərəfdən

$$\frac{dy}{dx} = f_1(y) \Rightarrow f_1(y) = \frac{1}{F_1'(y)} \Rightarrow F_1'(y) = \frac{1}{f_1(y)} > 0, \quad y \in (a_k, a_{k+1})$$

$F_1(y)$ funksiyası $y \in (a_k, a_{k+1})$ intervalında monoton artandır. Deməli, $y(x) = F_1^{-1}(x - x_0)$ verilmiş (7) tənliyinin $y \geq 0$ olduqda həllidir. Burada F_1^{-1} funksiyası $F_1(y)$ funksiyasının tərsidir.

$\int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f_1(y)} = \infty$ şərti daxilində (7) tənliyinin $y \geq 0$ halı üçün $y \rightarrow a_k + 0$ olduqda limitə keçək:

$$\lim_{y \rightarrow a_k + 0} x(y) = \lim_{y \rightarrow a_k + 0} \left[x_0 - \int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f_1(y)} \right] = -\infty$$

Buradan görünür ki, $\lim_{y \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_1^{-1}(x - x_0) = a_k + 0$, yəni $y = y(x)$ həlli $(-\infty, x_0]$ yarımx

oxu boyunca sola doğru davam edir (Belyayev, 2009, s. 3-11). Əgər $\int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f_1(y)} < \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{y \rightarrow a_k + 0} x(y) = \lim_{y \rightarrow a_k + 0} \left[x_0 - \int_{y_0}^{a_k} \frac{dy}{f_1(y)} \right] \stackrel{def}{=} \bar{x} < x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x} + 0} y(x) = a_k + 0 \Rightarrow y = a_k.$$

Oxşar qayda ilə $y < 0$ halında (7) tənliyinin sağ tərəfindəki $f_2(y)$ funksiyası üçün həllin yeganəlik meyarı təhlil edilir. $\int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f_2(y)} = \infty$ şərti daxilində (7) tənliyinin $y < 0$ halı üçün $y \rightarrow a_k - 0$ olduqda limitə keçsək:

$$\lim_{y \rightarrow a_k - 0} x(y) = \lim_{y \rightarrow a_k - 0} \left[x_0 - \int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f_2(y)} \right] = +\infty$$

alırıq. Buradan görünür ki, $\lim_{y \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F_2^{-1}(x - x_0) = a_k - 0$, yəni $y = y(x)$ həlli $[x_0, +\infty)$

yarımxu boyunca sağa doğru davam edir. Əgər $\int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f_2(y)} < \infty$ olarsa, onda

$$\lim_{y \rightarrow a_k - 0} x(y) = \lim_{y \rightarrow a_k - 0} \left[x_0 - \int_{\tilde{y}_0}^{a_k} \frac{dy}{f_2(y)} \right] \stackrel{def}{=} \bar{x} > x_0$$

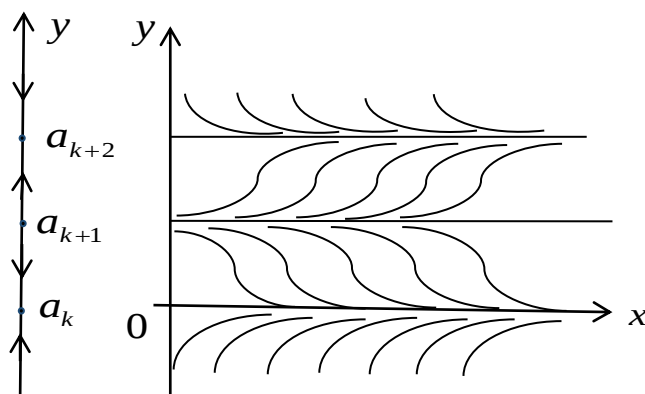
$$\lim_{x \rightarrow \bar{x} - 0} y(x) = a_k - 0$$

Onda $y = y(x)$ həllini məxsusi həllinə qədər davam etdirmək olar. Məhz

$$y = \begin{cases} y(x), & x \in [\bar{x}, x_0] \\ a_k, & x \in (-\infty, \bar{x}) \end{cases}$$

funksiyası (7) Koşi məsələsinin $(-\infty, x_0]$ yarımxunda davamedən həllidir.

Şəkildə göstərilən faza portretindən görünür ki, tarazlıq vəziyyətinin yaxın ətrafında tənliyin həlli özünü aşağıdakı mümkün halların birinə uyğun olaraq aparır (Bufetov, Qonçaruk, İlyashenko, 2019).



Şəkil. Avtonom diferensial tənliyin integral və faza ayrılırları

1. Əgər hər iki ən yaxın ox a_k nöqtəsinə yönəldilmişdirsə, başlanğıc şərtləri a_k -ya yaxın olan həllər, $x \rightarrow +\infty$ olduqda a_k -ya yaxınlaşır. Onda həllin bu halda tarazlıq vəziyyəti dayanıqlı olur.

2. Əgər hər iki ən yaxın ox a_k nöqtəsindən kənara yönəldilmişdirsə, onda başlanğıc şərtləri a_k -ya yaxın olan həllər əvvəlcə $x \rightarrow -\infty$ olduqda a_k -ya yaxınlaşır və sonradan isə a_k -dan uzaqlaşır. Belə bir tarazlıq vəziyyəti dayanıqsızdır.

3. Əgər ən yaxın iki oxdan biri a_k -ya doğru, digəri isə ondan əks tərəfə yönəlsə, onda başlanğıc şərtləri a_k -ya yaxın olan həllərdən biri əvvəlcə, digəri isə sonradan a_k -ya yaxınlaşır. Belə bir tarazlıq vəziyyəti yarım dayanıqlıdır.

Nəticə

Sağ tərəfi kəsilməz funksiya olan xüsusi tipli avtonom diferensial tənliklərin həllinin varlığı və yeganəliyi tədqiq edilmişdir. Məlum olmuşdur ki, ixtiyari başlanğıc şərtlər daxilində baxılan tip tənliyin həlli var və bu həll həmişə yeganə deyil. Məlum teoremə əsasən həllin varlığı və yeganəliyi üçün kafi şərt, verilmiş diferensial tənliyin sağ tərəfindəki funksiyanın Lipsits şərtini ödəməsidir. Verilmiş tənliyin sağ tərəfindəki funksiyanın xüsusi halında həllin yeganəliyi üçün kafi şərtin ödənilməsi yoxlanılmışdır. Nəticələr göstərir ki, tənliyin həllinin başlanğıc nöqtənin yaxın ətrafından bu nöqtəyə keçməsi üçün zəruri zaman anını müəyyən edən qeyri-məxsusi inteqral dağılıdır. Bu zaman inteqral əyriləri asimptotik olaraq $y = a_k$ xəttinə yaxınlaşır, lakin bu xəttə çatmır. Bu isə verilmiş diferensial tənliyin həllinin yeganəliyini təsdiq edir. $y = a_k$ xətti verilmiş tənliyin analitik ifadəsinin hər iki $y \geq 0$ və $y < 0$ halı üçün ortaq sıfırı olduğundan bu xəttin digər tərəfində başlanğıc nöqtənin yaxın ətrafından bu nöqtəyə keçməsinə ifadə edən qeyri-məxsusi inteqralın yığılan olması müşahidə olunur. Bu zaman inteqral əyrisi $y = a_k$ xəttinə çatır və həllin yeganəliyi pozulur. Beləliklə, $y = a_k$ xətti “birtərəfli” yeganəlik halını özündə saxlayır ki, bu da $y = a_k$ xəttinin verilmiş tənliyin təyin oblastının sərhəddində yerləşdiyi üçün deyil, bu xəttin yaxın ətrafında $f(y)$ funksiyanın Lipsits şərtini ödəməməsi ilə izah olunur.

Aparılan tədqiqat xüsusi tipli avtonom diferensial tənliklərin həlli üçün tarazlıq vəziyyətinin yaxın ətrafında uyğun faza portretini qurmağa və bu tarazlıq vəziyyətinin dayanıqlığı haqqında apriori qiymətləndirmə aparmağa imkan verir.

Ədəbiyyat

1. Astaşova, İ. V. (2012). *Differensialnıe uravneniya*. Nauka.
2. Astaşova, İ. V., & Nikişin, V. A. (2010). *Praktikum po kursu “Differensialnıe uravneniya”*. MESİ.
3. Balandin, A. S., & Chudinov, K. M. (2008). On the asymptotic behavior of linear autonomous functional differential equations of neutral type. *Functional Differential Equations*, 15(1–2), 5–15.
4. Balandin, A. S., & Sabatulina, T. L. (2017). Razreşimost avtonomnogo differensialnogo uravneniya s posledeystviem na otritsatel’noy poluosi. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Matematika*, (10), 26–37.
5. Belyayev, S. A. (2009). Poçti prodolzhimost’ resheniy differensial’nykh uravneniy. *Matematicheskie Zametki*, 85(1), 3–11. <https://doi.org/10.4213/mzm4167>
6. Bufetov, A. İ., Qonçaruk, N. B., & İlyaşenko, Y. S. (2019). *Obiknovennıe differensialnıe uravneniya*.
7. Denisov, A. M. (2018). *Differensialnıe uravneniya. Leksii. Cast’ 1-ya*. VMK MQU.
8. Paşayeva, S. T., & Veysova, S. Ə. (2024). Adi diferensial tənliklərin məxsusi həllinin varlığı. *Elmi İş: Beynəlxalq Elmi Jurnal*, 18(12), 150–155. <https://doi.org/10.36719/2663-4619/109/150-155>

9. Petrovskiy, İ. Q. (2009). *Leksii po teorii obıknovennıx differentsialnıx uravneniy*. Nauka.
10. Pontryagin, L. S. (1986). *Obıknovennıe differentsialnıe uravneniya*. Nauka.
11. Sabatulina, T., & Malygina, V. (2014). On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay. *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, (61), 1–16.
12. Serqeev, İ. N. (2015). *Differentsialnıe uravneniya. Cast' I-ya*. Mexmat, MQU im. M. V. Lomonosova.
13. Veysova, S. Ə., & Paşayeva, S. T. (2024). Adi diferensial tənliklərin Pikar üsulu ilə həllində xətlərin qiymətləndirilməsi. *Elmi İş: Beynəlxalq Elmi Jurnal*, 18(12), 142–149.
<https://doi.org/10.36719/2663-4619/109/142-149>

Daxil oldu: 12.02.2025

Qəbul edildi: 17.06.2025